

Seconda esercitazione

1. Il partitore RC

Il partitore vale anche con le impedenze.

Si consideri il classico circuito RC.

Considerando le impedenze, $V_{out} = V_{in} \cdot 1/(1+j\omega RC)$

Si tratta di un numero complesso che, razionalizzato, diventa

$$V_{out} = V_{in}(1-j\omega RC)/(1+(\omega RC)^2)$$

$$\text{Re}(V_{out}) = V_{in}/(1+(\omega RC)^2)$$

$$\text{Im}(V_{out}) = -V_{in} \omega RC/(1+(\omega RC)^2)$$

Quello che vediamo con l'oscilloscopio tra Vout e gnd è un segnale sinusoidale di ampiezza pari al modulo $|V_{out}|$ di Vout e sfasamento ϕ pari all'arco tangente del rapporto tra la parte immaginaria e la parte reale

$$|V_{out}| = \sqrt{(\text{Re}(V_{out}))^2 + (\text{Im}(V_{out}))^2} = V_{in} \cdot 1/\sqrt{1+(\omega RC)^2}$$

$$\phi = \text{artg}(-\omega RC)$$

Si definisce frequenza di taglio (F_c) la frequenza f per cui $\omega RC=1$, $F_c = 1/2\pi RC$; a tale pulsazione si avrà $|V_{out}|=0,707V_{in}$, ossia per cui l'attenuazione di Vout rispetto a V_{in} è pari a -3dB.

Si ha che $\omega RC = 2\pi fRC = f/F_c$.

- Se $f \ll F_c$ allora $\omega RC \ll 1$ e $|V_{out}| \sim V_{in}$ lo sfasamento è in ritardo di molto poco
- Se $f \gg F_c$ allora $\omega RC \gg 1$ e $|V_{out}| \sim V_{in}/\omega RC \sim 0$ lo sfasamento è in ritardo di $\pi/2$ radianti

Si ha il cosiddetto comportamento "passa-basso" in cui i segnali a frequenza $f \ll F_c$ passano inalterati mentre i segnali a frequenza $f \gg F_c$ sono attenuati.

2. Misure con generatore di segnali sinusoidali

Collegiamo l'uscita del generatore di segnale, attraverso un connettore a T, al canale principale (giallo per gli oscilloscopi in ELE1) dell'oscilloscopio con un cavo BNC-BNC.

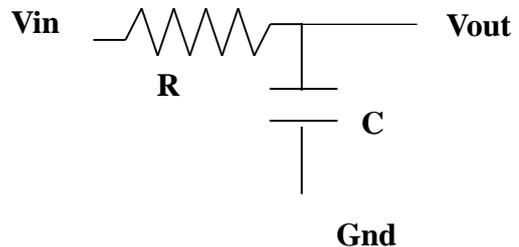
Collegiamo l'altra uscita del connettore a T del generatore di segnali al circuito mediante un cavo BNC-cocodrillo, collegando a Gnd il cocodrillo nero e a V_{in} il cocodrillo rosso.

Collegiamo la sonda dell'oscilloscopio sul secondo canale (azzurro per gli oscilloscopi in ELE1)

Verifichiamo con l'oscilloscopio che V_{in} (canale azzurro) sia uguale a V_{in} (canale giallo), ossia il segnale sia uguale e le scale di tensione siano uguali, altrimenti verificare l'attenuazione della sonda e compensarla su oscilloscopio (sonda-> attenuazione 1X o 10x)

Proviamo a utilizzare i valori $R = 1k\Omega$ e $C = 100nF$ ($RC=1/\omega=1/2\pi F_c=0,1ms$, per cui $F_c = 1/2\pi RC = 1,6$ kHz) e frequenze di un segnale sinusoidale con 4Vpp pari a 100Hz, 1kHz, 10kHz (approfondimento: provare anche 10Hz e 100kHz). Si compili la seguente tabellina misurando con l'oscilloscopio:

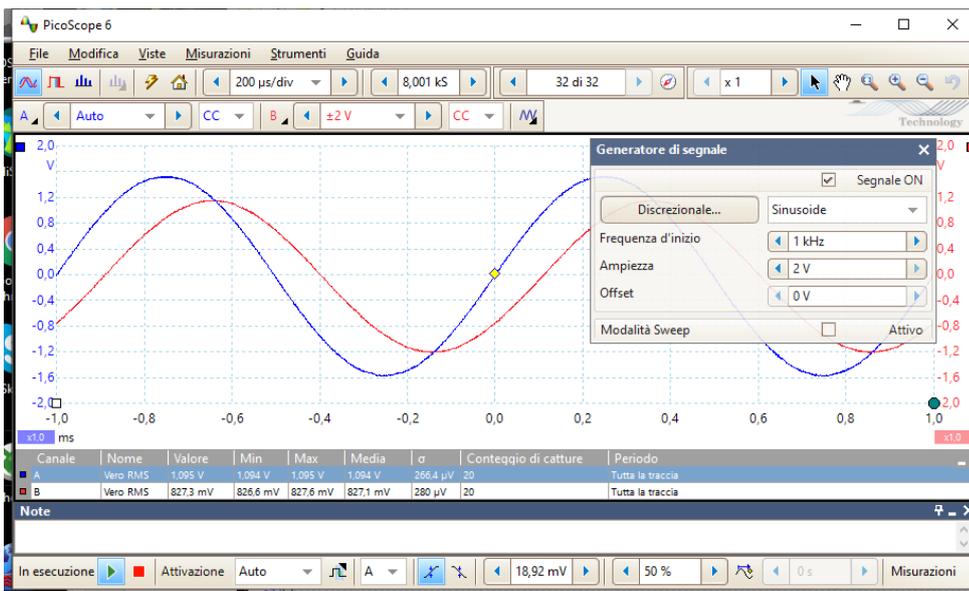
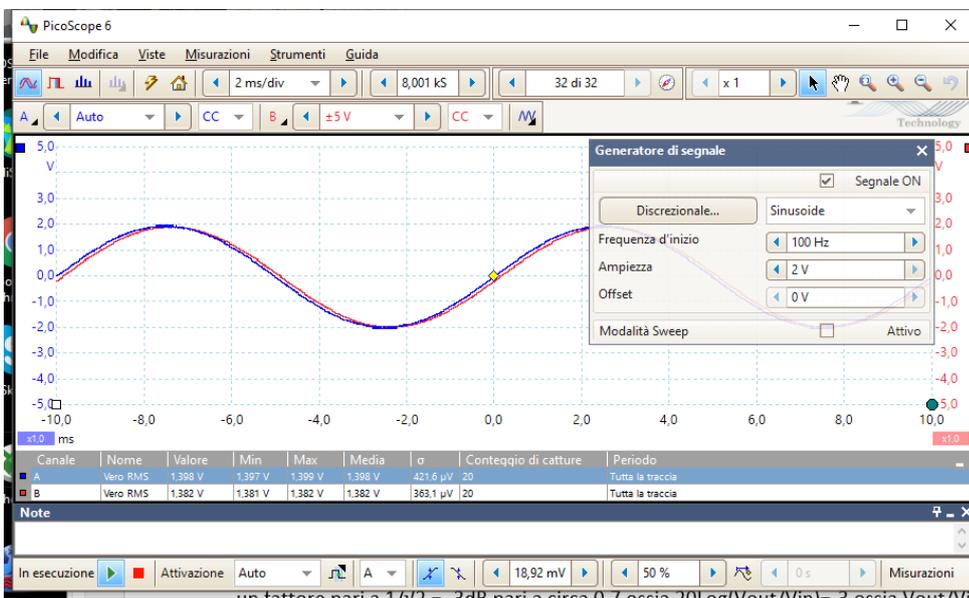
Frequenza	Periodo (ms)	Vout (picco)	Vout/Vin	Sfasamento (ms)	Sfasamento (rad)
10 Hz	100				
100 Hz	10				
1000 Hz (1k)	1				
10 kHz	0,1 (100 μs)				
100 kHz	10 μs				

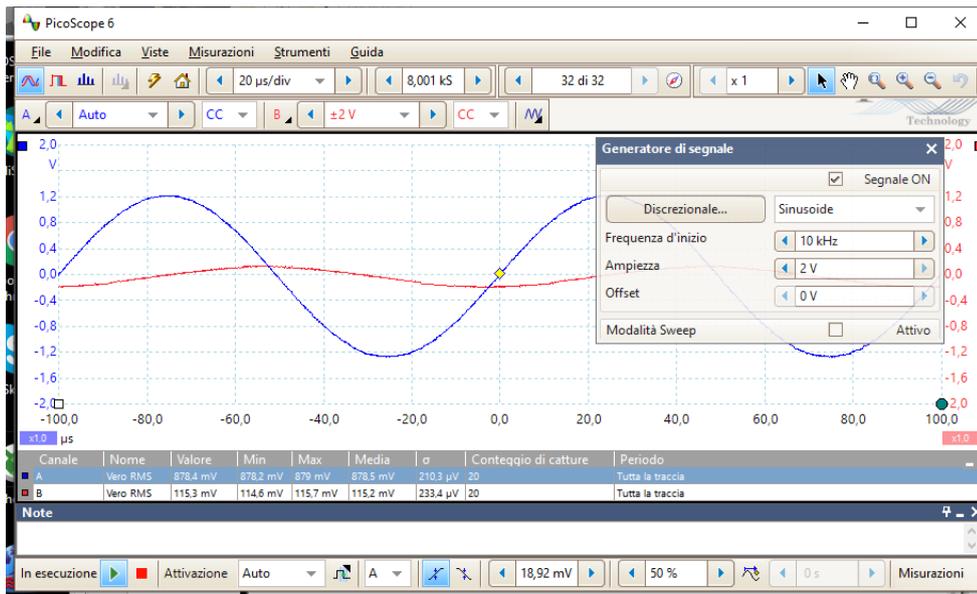


Si noti come la sinusoide generata con ampiezza 2V (4 Vpp ossia 4V picco-picco o distanza tra i picchi massimo e minimo) e frequenza 100Hz abbia valore TRUE rms (valore quadratico medio, spesso detto valore efficace) di circa 1,4V pari a $2V/\sqrt{2}$ e rimanga inalterata dopo il partitore. Infatti a 100Hz $\omega RC = 0,0628$ per cui, dato che $V_{out} = V_{in} * 1/\sqrt{1+(\omega RC)^2}$ si ha che $V_{out} = V_{in}/1,002$ e quindi in pratica $V_{out}/V_{in} = 1$.

A 1kHz si osservi come il generatore di segnali del Picoscope non riesca a generare i 4Vpp (questo non succede con i generatori di segnale del laboratorio). Il rapporto tra la V_{out} (TRUE rms = 0,83V) e la V_{in} (TRUE rms = 1,10V) è circa 0,75; infatti a 1kHz $\omega RC = 0,628$ e teoricamente $V_{out} = V_{in}/1,18 = 0,85 V_{in}$. Si noti anche come la V_{out} (rossa) sia in ritardo di circa 100us (circa mezza divisione di ritardo sul punto di attraversamento dello zero), che corrisponde a circa 36°

A 10kHz il generatore di segnali genera di fatto un segnale molto più piccolo (TRUE rms = 0,88 V) e il segnale in uscita è molto attenuato (TRUE rms = 0,115 V); infatti a 10kHz $\omega RC = 6,28$ e teoricamente $V_{out} = V_{in}/6,35 = 0,157 V_{in}$. Si noti che lo sfasamento è di circa 90° .





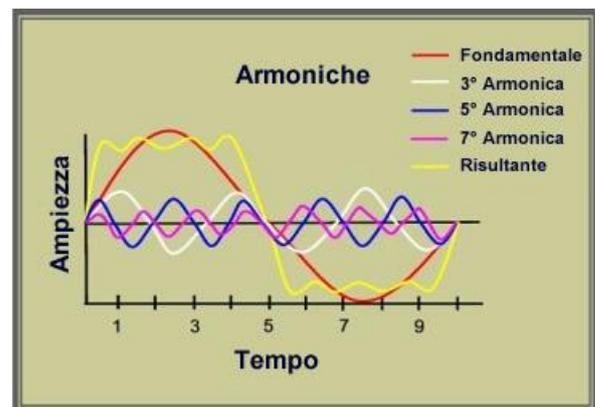
Verificare lo sfasamento in ritardo che tende a 90° (un quarto di periodo) all'aumentare della frequenza. Individuare la frequenza di taglio $F_c (=1/2\pi RC)$ e verificare che per quella frequenza il segnale si attenua di un fattore pari a $1/\sqrt{2} = -3\text{dB}$ pari a circa 0,7 ossia $20\text{Log}(V_{\text{out}}/V_{\text{in}}) = -3$ ossia $V_{\text{out}}/V_{\text{in}} = 10^{-0,15} = 0,7$ (Osservando sperimentalmente la frequenza F_c è circa 1500Hz). Il circuito RC è un filtro del primo ordine che "taglia" 20db/decade, ossia $20\text{Log}(V_{\text{out}}/V_{\text{in}}) = -20$ ossia $V_{\text{out}}/V_{\text{in}} = 10^{-1} = 0,1$.

Misurando con il Picoscope a 15kHz e facendo il rapporto tra i valori TRUE rms si ha $83\text{mV}/860\text{mV} = 0,097$

Il filtro RC si usa per eliminare le alte frequenze (quelle oltre la frequenza di taglio F_c) ma l'attenuazione di 20dB/decade (filtro del primo ordine) è molto bassa ed esistono filtri migliori.

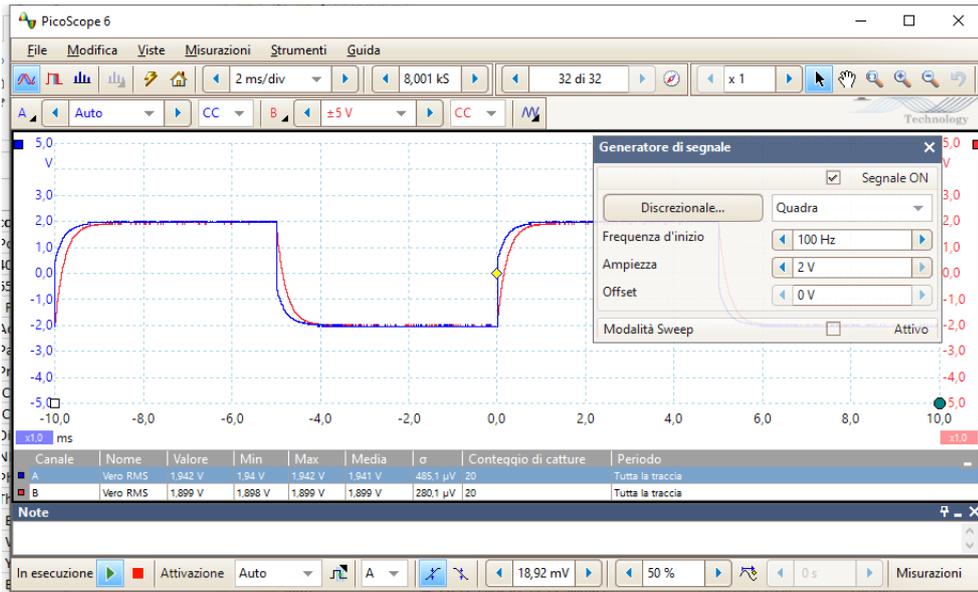
3. ONDA QUADRA

L'onda quadra è un insieme di diverse frequenze, costituite dalla frequenza fondamentale e dalle armoniche dispari; quindi la relazione che è stata utilizzata per i segnali sinusoidali ci è di scarsa utilità. È più significativo considerare l'onda quadra come una successione di "gradini" e analizzare la risposta al gradino del circuito, ipotizzando inizialmente di utilizzare segnali a bassissima frequenza.

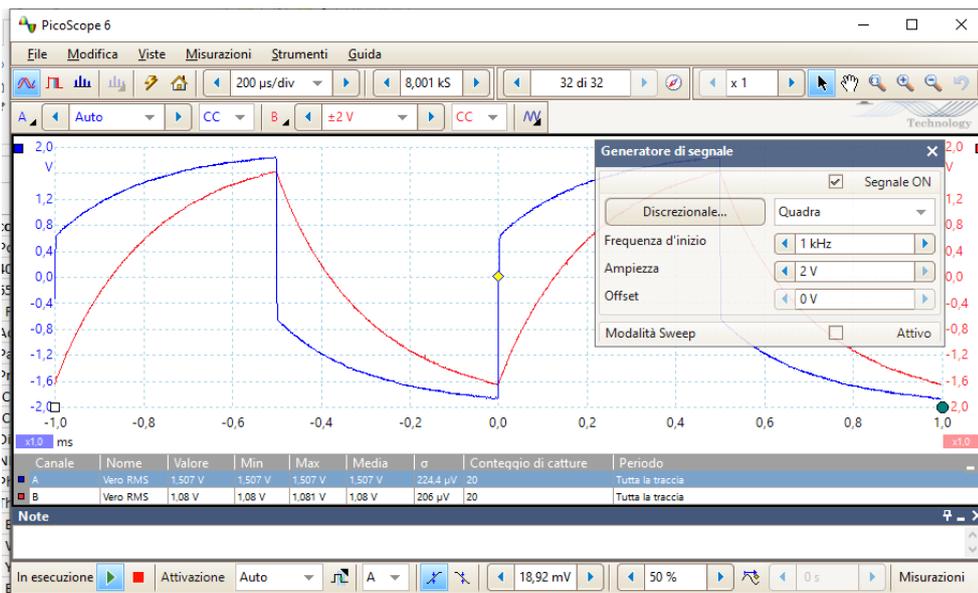


Si osservi il comportamento dell'RC pilotato da un'onda quadra (4Vpp, 100 Hz).

Il circuito RC risponde al gradino come $V(t) = V_{\text{ini}} + (V_{\text{fin}} - V_{\text{ini}})(1 - e^{-t/\tau})$ dove V_{ini} è la tensione iniziale prima del gradino e V_{fin} è la tensione finale dopo il gradino.

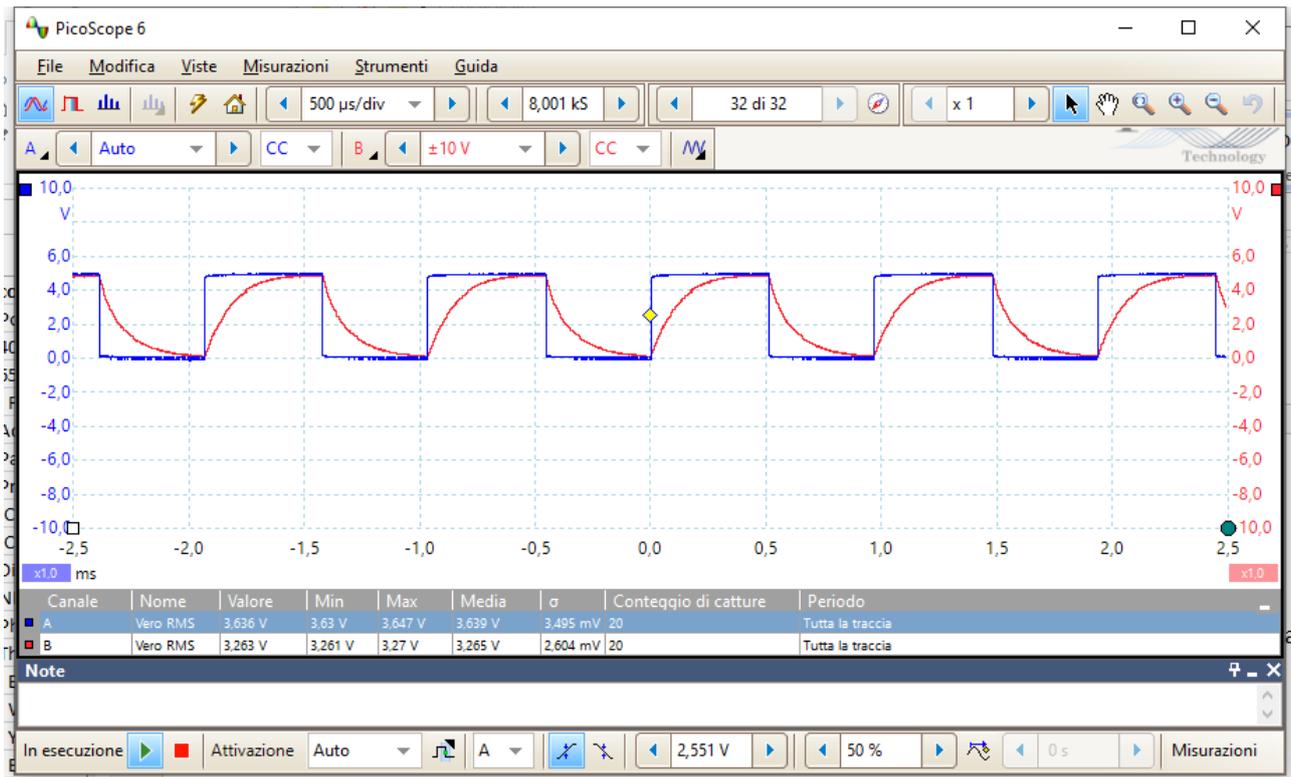


Aumentando la frequenza il segnale si distorce in quanto il Picoscope ha un generatore di segnali limitato (utilizzando, invece, il generatore di segnali presente in laboratorio si ottiene un'onda quadra perfetta a 1kHz e 4Vpp)



4. Misure utilizzando il generatore ad onda quadra su scheda

Utilizzando il segnale ad onda quadra generato dall'oscillatore su scheda – pin 8 del 74HC132 – (5Vpp, circa 1kHz) si ha



Si utilizzi il multimetro per fare misure di tensione in DC. Ricordando che in DC il multimetro misura il valore medio, si osservi come il valore medio dell'onda quadra sia poco più di 2,5V. Il valore medio dell'uscita del RC (ai capi del condensatore) praticamente non cambia al variare della costante di tempo del filtro (variando R o variando C).

Si utilizzi il multimetro per fare misure di tensione in AC (risultati molto poco precisi). Ricordando che in AC il multimetro misura il valore quadratico medio del segnale riferito al valore medio (ossia eliminando la componente continua) l'onda quadra tra 0V e 5V misurata in AC è equivalente ad un'onda quadra tra -2,5V e +2,5V e il valore quadratico medio è sempre di circa 2,5V. Al contrario, il valore quadratico medio del segnale ai capi del condensatore è di circa 1,9V e se metto in parallelo al condensatore da 100nF un altro condensatore da 100nF, raddoppiando la costante di tempo, il valore quadratico medio scende a 1,3V. Infatti la frequenza di taglio $F_c (=1/2\pi RC)$ è passata da circa 1,6 kHz a 0,8 kHz e quindi il segnale a circa 1 kHz è attenuato di più dal filtro a frequenza F_c minore (il segnale ha frequenza $f > F_c=0,8$ kHz) rispetto al filtro originario ($f < F_c=1,6$ kHz).

Si ha il cosiddetto comportamento "passa-basso" in cui i segnali a frequenza $f \ll F_c$ passano inalterati mentre i segnali a frequenza $f \gg F_c$ sono attenuati.

Si ricorda che la funzione di trasferimento del circuito RC considerando i moduli è $V_{out} = V_{in} \cdot 1/\sqrt{1+(\omega RC)^2}$ dove $\omega=2\pi f=6,9$ kHz e $RC = 1k \cdot 100n = 0,1ms$ quindi $\omega RC=0,7$ e di conseguenza $V_{out}/V_{in} = 1/1,22 = 0,8$ e infatti facendo il rapporto tra i due valori efficaci si ottiene $1,9V/2,5V = 0,76$ che è circa uguale a 0,8. Se raddoppio C (mettendo un condensatore uguale in parallelo) allora $\omega RC=1,4$ allora $V_{out}/V_{in} = 0,6$ e infatti facendo il rapporto tra i valori efficaci si ottiene $1,3/2,5 = 0,5$. Si noti che la funzione di trasferimento si riferisce a sinusoidi e non a onde quadre, dove le armoniche superiori sono molto più attenuate.

5. Partitore CR

Il partitore vale anche con le impedenze.

Si consideri il classico circuito CR.

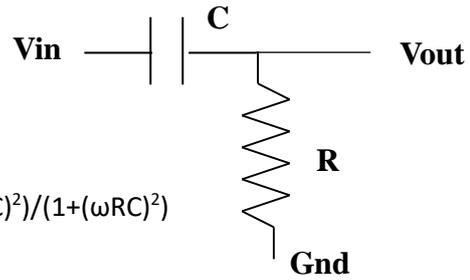
Considerando le impedenze, $V_{out} = V_{in} \cdot j\omega RC / (1 + j\omega RC)$

Si tratta di un numero complesso che, razionalizzato, diventa:

$$V_{out} = V_{in} \cdot j\omega RC(1 - j\omega RC) / (1 + (\omega RC)^2) = V_{in} \cdot (j\omega RC + (\omega RC)^2) / (1 + (\omega RC)^2)$$

$$\text{Re}(V_{out}) = V_{in} \cdot (\omega RC)^2 / (1 + (\omega RC)^2)$$

$$\text{Im}(V_{out}) = V_{in} \cdot \omega RC / (1 + (\omega RC)^2)$$



Quello che vediamo con l'oscilloscopio tra Vout e Gnd è un segnale sinusoidale di ampiezza pari al modulo $|V_{out}|$ di Vout e sfasamento ϕ pari all'arco tangente del rapporto tra la parte immaginaria e la parte reale

$$|V_{out}| = \sqrt{(\text{Re}(V_{out}))^2 + (\text{Im}(V_{out}))^2} = V_{in} \cdot \omega RC / \sqrt{1 + (\omega RC)^2}$$

$$\phi = \text{artg}(1/\omega RC)$$

Data la frequenza di taglio $F_c = 1/2\pi RC$, in modo che $\omega RC = 2\pi f RC = f/F_c$

- Se $f \ll F_c$ allora $\omega RC \ll 1$ allora $|V_{out}| \sim 0$ e lo sfasamento è in anticipo di $\pi/2$ radianti
- Se $f \gg F_c$ allora $\omega RC \gg 1$ e $|V_{out}| \sim V_{in}$ e lo sfasamento è ~ 0

Si ha il cosiddetto comportamento "passa-alto" in cui i segnali a frequenza $f \gg F_c$ passano inalterati mentre i segnali a frequenza $f \ll F_c$ sono attenuati.

6. Misure con generatore di segnali sinusoidali

Collegiamo l'uscita del generatore di segnale, attraverso un connettore a T, al canale principale (giallo per gli oscilloscopi in ELE1) dell'oscilloscopio con un cavo BNC-BNC.

Collegiamo l'altra uscita del connettore a T del generatore di segnali al circuito mediante un cavo BNC-coccodrillo, collegando a Gnd il coccodrillo nero e a Vin il coccodrillo rosso.

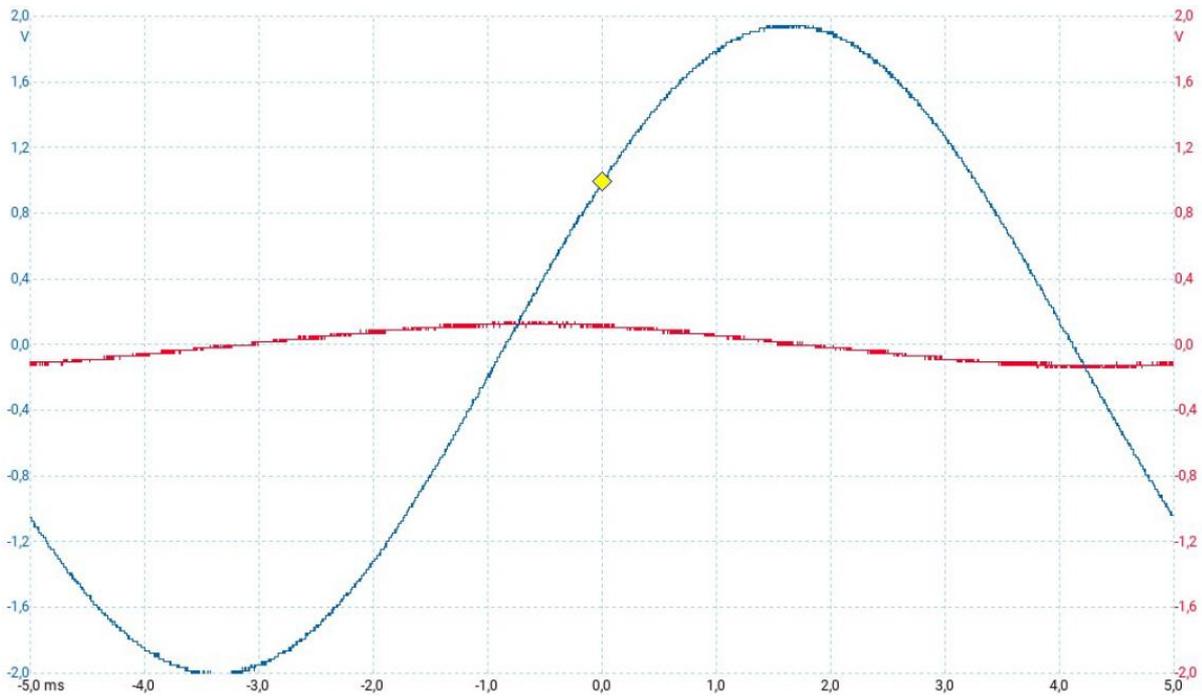
Collegiamo la sonda dell'oscilloscopio sul secondo canale (azzurro per gli oscilloscopi in ELE1)

Verifichiamo con l'oscilloscopio che V_{in} (canale azzurro) sia uguale a V_{in} (canale giallo), ossia il segnale sia uguale e le scale di tensione siano uguali, altrimenti verificare l'attenuazione della sonda e compensarla su oscilloscopio (sonda -> attenuazione 1X o 10x)

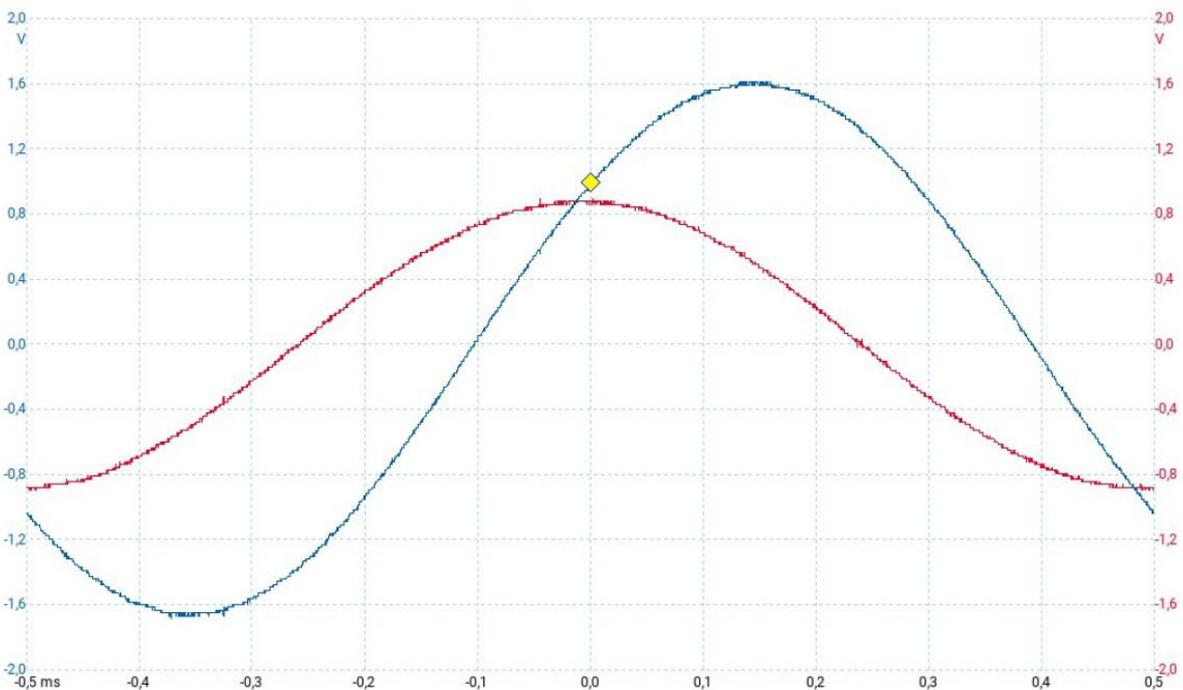
Proviamo a utilizzare i valori $R = 1\text{k}\Omega$ e $C = 100\text{nF}$ ($RC = 1/\omega = 1/2\pi F_c = 0,1\text{ms}$, per cui $F_c = 1/2\pi RC = 1,6\text{kHz}$) e frequenze di un segnale sinusoidale con 4Vpp pari a 100Hz, 1kHz, 10kHz (approfondimento: provare anche 10Hz e 100kHz). Si compili la seguente tabellina misurando con l'oscilloscopio:

Frequenza	Periodo (ms)	Vout (picco)	Vout/Vin	Sfasamento (ms)	Sfasamento (rad)
10 Hz	100				
100 Hz	10				
1000 Hz (1k)	1				
10 kHz	0,1 (100 μs)				
100 kHz	10 μs				

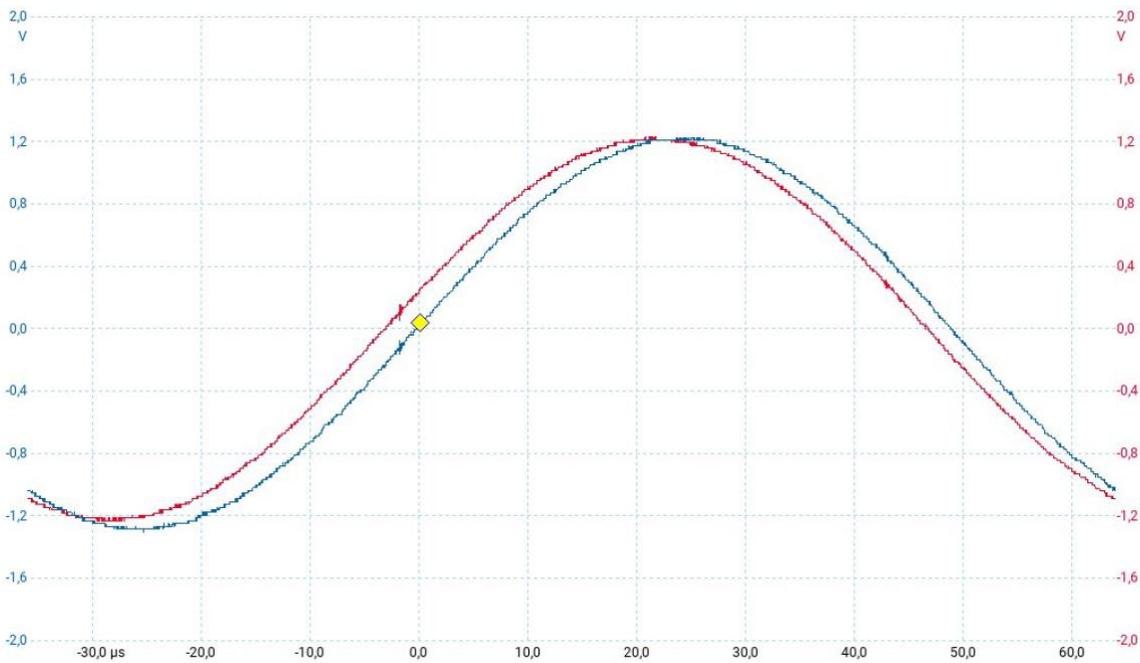
Si noti come la sinusoide generata con ampiezza 2V e frequenza 100Hz (segnale blu) produca in uscita dal partitore CR una sinusoide (segnale rosso) sfasata in anticipo di circa 90° e fortemente attenuata.



A 1kHz si osservi come il generatore di segnali del Picoscope non riesca a generare i 4Vpp (questo non succede con i generatori di segnale del laboratorio). Il segnale in uscita (rosso) è attenuato e in anticipo ma con effetti decisamente inferiori rispetto al test precedente a 100Hz. Il segnale rosso (uscita del partitore CR) è in anticipo rispetto al segnale in ingresso (blu) di circa 150us che, rispetto ad un periodo di 1000us, corrisponde ad un anticipo di circa 54°.



A 10kHz, aldilà delle difficoltà del Picoscope, si osservi come i segnali siano molto simili tra loro (limitata attenuazione, limitato sfasamento).

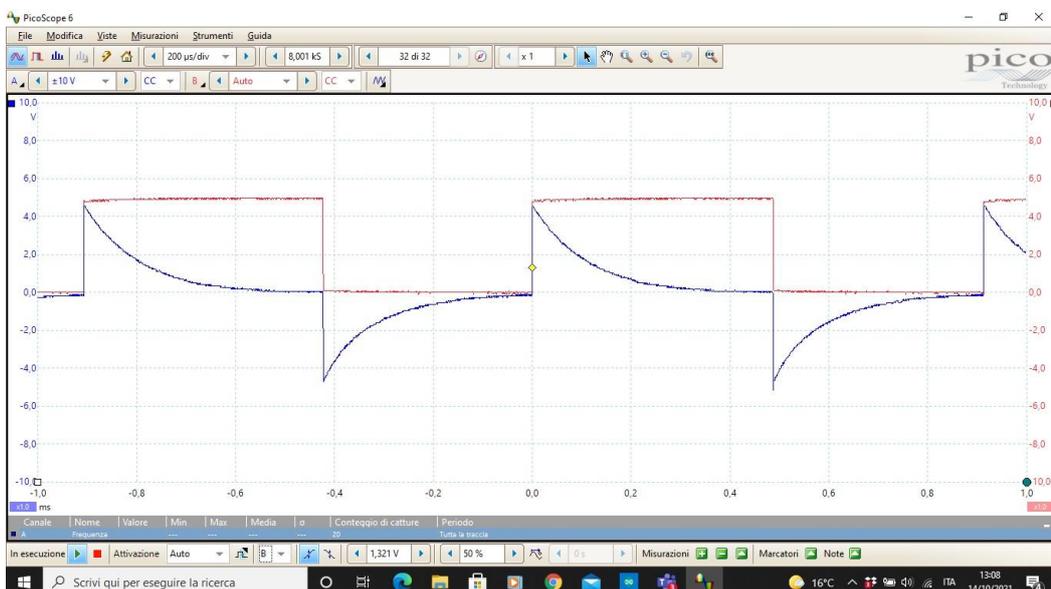


In conclusione, il filtro CR si usa per eliminare le basse frequenze (quelle prima della frequenza di taglio F_c) ma l'attenuazione di 20dB/decade (filtro del primo ordine) è molto bassa ed esistono filtri migliori.

Questo filtro è normalmente usato per rimuovere la componente continua (valore medio del segnale). Ad esempio, il multimetro in AC fa passare il segnale attraverso un filtro CR con valore di resistenza molto elevato (F_c molto bassa) per rimuovere solo la componente continua.

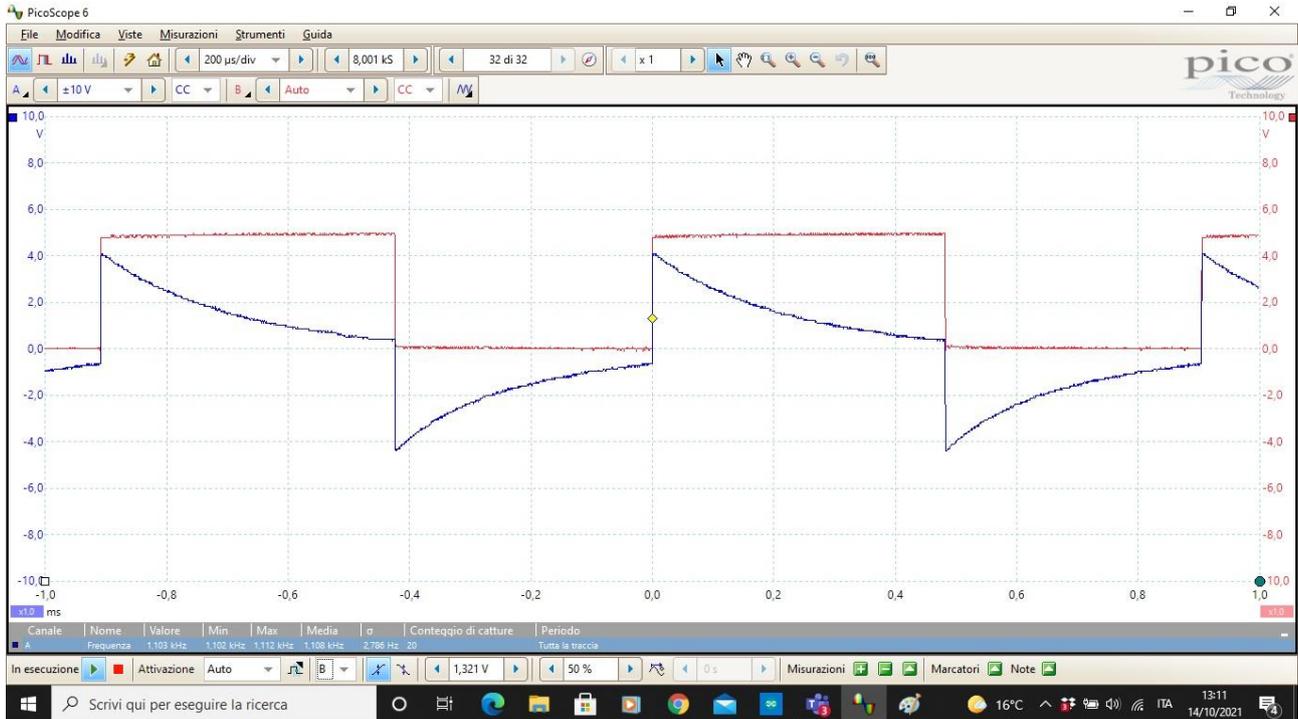
7. Misure utilizzando il generatore ad onda quadra su scheda

Utilizzando il segnale ad onda rettangolare (quasi quadra) generato dall'oscillatore su scheda –pin 8 del 74HC132- (5Vpp, circa 1kHz) con $C=100\text{nF}$ e $R=1\text{k}$ si ottiene il segnale in figura. Si osservi che, a fronte della brusca variazione di tensione in ingresso (segnale rosso), il condensatore risponde con un'identica brusca variazione in modo che la tensione ai suoi capi, che prima era zero, si mantenga a zero e solo lentamente si modifichi (carica/scarica del condensatore). Si osservi come, anche se temporaneamente, il circuito sia in grado di generare una tensione negativa fuori dall'intervallo di tensioni dell'onda quadra in ingresso.



Aggiungendo il condensatore in parallelo, quindi aumentando il valore del RC e diminuendo la frequenza di taglio e quindi facendo “apparire” l’onda quadra a circa 1kHz come se fosse un segnale a più alta frequenza, si ottiene il segnale nella figura seguente, che assomiglia di più all’onda quadra originaria.

Osservando la forma dei segnali, si vede che il condensatore si oppone alle brusche variazioni di tensione, quindi se il segnale ha un fronte di discesa di 5 V, anche l’altro capo del condensatore avrà un fronte di discesa di 5V, generando temporaneamente tensioni negative; poi il condensatore si carica (e scarica) riportando la tensione verso lo zero.



Facendo le misure con il multimetro in DC, si ha:

Onda quadra = 2,6 V

Uscita (C=100nF) = 0,0 V

Uscita (C=200nF) = 0,0 V

Dimostrando quindi che la componente continua, detta anche offset, non passa attraverso il condensatore.

Facendo le misure con il multimetro in AC e ricordando le scarse prestazioni del multimetro così configurato, si ottiene comunque un trend in accordo alle aspettative.

Onda quadra = 2,5 V

Uscita (C=100nF) = 1,14 V

Uscita (C=200nF) = 1,84 V

Si ha il cosiddetto comportamento “passa-alto” in cui i segnali a frequenza $f \gg f_c$ passano inalterati mentre i segnali a frequenza $f \ll f_c$ sono attenuati e i segnali a frequenza 0, ossia la componente continua del segnale (= valore medio = offset), sono completamente bloccati. Ad esempio, se sostituisco la resistenza da 1k con una da 10k mantenendo C=200nF, ottengo misura in AC di 2,5V, praticamente uguale all’onda in ingresso e all’oscilloscopio visualizzo un’onda quadra tra -2,5V e +2,5 V.

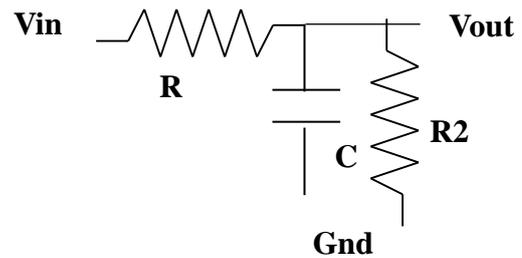
APPROFONDIMENTO: Circuito RCR in AC (sinusoide)

$R_2 = R$. Considerando le impedenze,

$$R_a = R \cdot R_2 / (R + R_2)$$

$$G = R_2 / (R_2 + R)$$

$$V_{out} = V_{in} \cdot G \cdot 1 / (1 + j\omega C R_a)$$

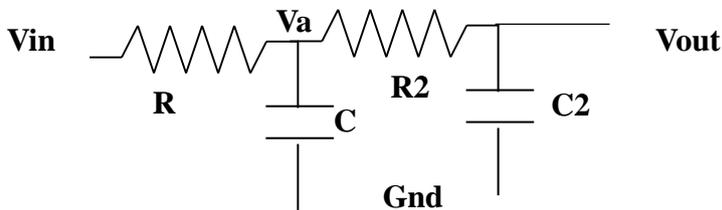


Rispetto al classico circuito RC si modifica la frequenza di taglio ($1/2\pi C R_a$) e si modifica il guadagno statico G, ossia a basse frequenze l'onda non passa inalterata ma attenuata del fattore G.

Approfondimento: circuito a doppio RC in AC (sinusoide)

Si montino due circuiti RC uguali al primo, uno in cascata all'altro.

Perché non ho l'effetto del filtro singolo moltiplicato al quadrato (ad esempio a FC attenuazione di $0,7 \cdot 0,7 = 0,5$)? Valutazione dell'effetto del secondo filtro sul primo.



In pratica l'impedenza complessiva Z_{eq} verso massa è data dal parallelo di C con la serie di R_2 e C_2 , che è pari a $Z_{eq} = (1/j\omega(C+C_2)) \cdot (1+j\omega R_2 C_2) / (1+j\omega R_2 C_a)$ dove $C_a = C \cdot C_2 / (C+C_2)$

L'espressione finale di V_a è data dal partitore di R con Z_{eq} e quindi risulta

$$V_a = 1 / (1 + j\omega R(C+C_2)K(\omega)) \text{ dove } K(\omega) = (1+j\omega R_2 C_a) / (1+j\omega R_2 C_2) \text{ dove } C_a = C \cdot C_2 / (C+C_2)$$

Se $C_2 \ll C$ allora $C_a \approx C_2$ e quindi $K(\omega) \approx 1$ indipendentemente da ω

Modificare i valori di C_2 e R_2 da $1k\Omega$ e $100nF$ a $47k\Omega$ e $2.2nF$ ($R \cdot C \approx R_2 \cdot C_2$) e valutare la diminuzione dell'effetto di carico.

Confrontare i valori di attenuazione a $f = f_c = 1/2\pi RC$ nel caso del filtro singolo, del filtro a doppio RC con $R_2 = R$ e $C_2 = C$ e nel caso del filtro doppio con $R_2 = 47k\Omega$ e $C_2 = 2.2nF$. Nota: l'impedenza d'ingresso della sonda dell'oscilloscopio è $1M\Omega$ (resistenza che finisce in parallelo tra il punto di misura e la massa) per cui se si utilizza $R_2 = 100k\Omega$ e $C_2 = 1nF$, si deve tenere conto dell'effetto di carico della sonda.

APPROFONDIMENTO (da comprendere a fine corso FE) Per non avere composizione delle impedenze bisognerebbe inserire tra il primo e il secondo filtro RC un adattatore di impedenza, con impedenza di ingresso altissima e impedenza d'uscita bassissima.

Questo dispositivo è l'amplificatore operazionale (es. uA741 o LM358), un dispositivo attivo che deve essere alimentato e che ha impedenza d'ingresso elevatissima e bassissima impedenza di uscita.

